**De eerste 1500 priemgetallen**

 Zie http://primes.utm.edu/

 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71

 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113

 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173

 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229

 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281

 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349

 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409

 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463

 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541

 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601

 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659

 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733

 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809

 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863

 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941

 947 953 967 971 977 983 991 997 1009 1013

 1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061 1063 1069

 1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151

 1153 1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223

 1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283 1289 1291

 1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373

 1381 1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451

 1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511

 1523 1531 1543 1549 1553 1559 1567 1571 1579 1583

 1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637 1657

 1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723 1733

 1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811

 1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889

 1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987

 1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027 2029 2039 2053

 2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129

 2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179 2203 2207 2213

 2221 2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287

 2293 2297 2309 2311 2333 2339 2341 2347 2351 2357

 2371 2377 2381 2383 2389 2393 2399 2411 2417 2423

 2437 2441 2447 2459 2467 2473 2477 2503 2521 2531

 2539 2543 2549 2551 2557 2579 2591 2593 2609 2617

 2621 2633 2647 2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687

 2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719 2729 2731 2741

 2749 2753 2767 2777 2789 2791 2797 2801 2803 2819

 2833 2837 2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897 2903

 2909 2917 2927 2939 2953 2957 2963 2969 2971 2999

 3001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079

 3083 3089 3109 3119 3121 3137 3163 3167 3169 3181

 3187 3191 3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253 3257

 3259 3271 3299 3301 3307 3313 3319 3323 3329 3331

 3343 3347 3359 3361 3371 3373 3389 3391 3407 3413

 3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469 3491 3499 3511

 3517 3527 3529 3533 3539 3541 3547 3557 3559 3571

 3581 3583 3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637 3643

 3659 3671 3673 3677 3691 3697 3701 3709 3719 3727

 3733 3739 3761 3767 3769 3779 3793 3797 3803 3821

 3823 3833 3847 3851 3853 3863 3877 3881 3889 3907

 3911 3917 3919 3923 3929 3931 3943 3947 3967 3989

 4001 4003 4007 4013 4019 4021 4027 4049 4051 4057

 4073 4079 4091 4093 4099 4111 4127 4129 4133 4139

 4153 4157 4159 4177 4201 4211 4217 4219 4229 4231

 4241 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297

 4327 4337 4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397 4409

 4421 4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493

 4507 4513 4517 4519 4523 4547 4549 4561 4567 4583

 4591 4597 4603 4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657

 4663 4673 4679 4691 4703 4721 4723 4729 4733 4751

 4759 4783 4787 4789 4793 4799 4801 4813 4817 4831

 4861 4871 4877 4889 4903 4909 4919 4931 4933 4937

 4943 4951 4957 4967 4969 4973 4987 4993 4999 5003

 5009 5011 5021 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087

 5099 5101 5107 5113 5119 5147 5153 5167 5171 5179

 5189 5197 5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279

 5281 5297 5303 5309 5323 5333 5347 5351 5381 5387

 5393 5399 5407 5413 5417 5419 5431 5437 5441 5443

 5449 5471 5477 5479 5483 5501 5503 5507 5519 5521

 5527 5531 5557 5563 5569 5573 5581 5591 5623 5639

 5641 5647 5651 5653 5657 5659 5669 5683 5689 5693

 5701 5711 5717 5737 5741 5743 5749 5779 5783 5791

 5801 5807 5813 5821 5827 5839 5843 5849 5851 5857

 5861 5867 5869 5879 5881 5897 5903 5923 5927 5939

 5953 5981 5987 6007 6011 6029 6037 6043 6047 6053

 6067 6073 6079 6089 6091 6101 6113 6121 6131 6133

 6143 6151 6163 6173 6197 6199 6203 6211 6217 6221

 6229 6247 6257 6263 6269 6271 6277 6287 6299 6301

 6311 6317 6323 6329 6337 6343 6353 6359 6361 6367

 6373 6379 6389 6397 6421 6427 6449 6451 6469 6473

 6481 6491 6521 6529 6547 6551 6553 6563 6569 6571

 6577 6581 6599 6607 6619 6637 6653 6659 6661 6673

 6679 6689 6691 6701 6703 6709 6719 6733 6737 6761

 6763 6779 6781 6791 6793 6803 6823 6827 6829 6833

 6841 6857 6863 6869 6871 6883 6899 6907 6911 6917

 6947 6949 6959 6961 6967 6971 6977 6983 6991 6997

 7001 7013 7019 7027 7039 7043 7057 7069 7079 7103

 7109 7121 7127 7129 7151 7159 7177 7187 7193 7207

 7211 7213 7219 7229 7237 7243 7247 7253 7283 7297

 7307 7309 7321 7331 7333 7349 7351 7369 7393 7411

 7417 7433 7451 7457 7459 7477 7481 7487 7489 7499

 7507 7517 7523 7529 7537 7541 7547 7549 7559 7561

 7573 7577 7583 7589 7591 7603 7607 7621 7639 7643

 7649 7669 7673 7681 7687 7691 7699 7703 7717 7723

 7727 7741 7753 7757 7759 7789 7793 7817 7823 7829

 7841 7853 7867 7873 7877 7879 7883 7901 7907 7919

 7927 7933 7937 7949 7951 7963 7993 8009 8011 8017

 8039 8053 8059 8069 8081 8087 8089 8093 8101 8111

 8117 8123 8147 8161 8167 8171 8179 8191 8209 8219

 8221 8231 8233 8237 8243 8263 8269 8273 8287 8291

 8293 8297 8311 8317 8329 8353 8363 8369 8377 8387

 8389 8419 8423 8429 8431 8443 8447 8461 8467 8501

 8513 8521 8527 8537 8539 8543 8563 8573 8581 8597

 8599 8609 8623 8627 8629 8641 8647 8663 8669 8677

 8681 8689 8693 8699 8707 8713 8719 8731 8737 8741

 8747 8753 8761 8779 8783 8803 8807 8819 8821 8831

 8837 8839 8849 8861 8863 8867 8887 8893 8923 8929

 8933 8941 8951 8963 8969 8971 8999 9001 9007 9011

 9013 9029 9041 9043 9049 9059 9067 9091 9103 9109

 9127 9133 9137 9151 9157 9161 9173 9181 9187 9199

 9203 9209 9221 9227 9239 9241 9257 9277 9281 9283

 9293 9311 9319 9323 9337 9341 9343 9349 9371 9377

 9391 9397 9403 9413 9419 9421 9431 9433 9437 9439

 9461 9463 9467 9473 9479 9491 9497 9511 9521 9533

 9539 9547 9551 9587 9601 9613 9619 9623 9629 9631

 9643 9649 9661 9677 9679 9689 9697 9719 9721 9733

 9739 9743 9749 9767 9769 9781 9787 9791 9803 9811

 9817 9829 9833 9839 9851 9857 9859 9871 9883 9887

 9901 9907 9923 9929 9931 9941 9949 9967 9973 10007

 10009 10037 10039 10061 10067 10069 10079 10091 10093 10099

# Formules voor priemgetallen

### Een eerste poging

1. Is de rij 31, 331, 3331, … een rij van priemgetallen? Bewijs je antwoord.

### Mersenne priemgetallen

Marin Mersenne (1588-1648) was een Franse wiskundige die een formule zocht om alle priemgetallen te genereren. Hij bedacht een speciale rij van getallen die nu naar hem genoemd zijn. Mersennegetallen zijn gehele getallen van de vorm $M\_{n}=2^{n}-1$ met $n$ een natuurlijk getal. Hieronder zie je de eerste 6 Mersennegetallen:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$n$$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $$2^{n}-1$$ | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 |

1. Is het 13de Mersennegetal, $2^{13}-1$, een priemgetal?
2. Is de volgende bewering juist? Bewijs je antwoord.

 Als $p$ een priemgetal is, dan is$ M\_{p}=2^{p}-1$ ook priem.

1. Is het 1000ste Mersennegetal, $2^{1000}-1$ , priem? Bewijs je antwoord.
2. Is de volgende bewering juist? Bewijs je antwoord.

 Als $M\_{p}=2^{p}-1$ een priemgetal is, dan is $p$ priem.

Een Mersennegetal dat een priemgetal is, noemen we een *Mersennepriem.*

### Rijen van priemgetallen

Geïnspireerd door het bewijs van Euclides, kunnen we oneindige rijtjes van verschillende priemgetallen maken.

De eerste rij van getallen genereren we als volgt:

 Start met $u\_{1}=2$$u\_{1}=2$.

 Stel dan $u\_{n+1}$ de kleinste priemdeler van $a\_{n}=u\_{1}u\_{2}u\_{3}…u\_{n}+1$.

1. Bereken $u\_{2}, u\_{3},u\_{4} en u\_{5}$.
2. Kan een getal twee keer in deze rij voorkomen? Bewijs je antwoord!

We definiëren nu een tweede rij $v\_{n}$ van priemgetallen:

 Start met $v\_{1}=2$.

 Stel dan $v\_{n+1}$ de kleinste priemdeler van $b\_{n}=1+v\_{1}^{2}v\_{2}^{2}…v\_{n}^{2}$ $1+u\_{1}^{2}u\_{2}^{2}…u\_{n}^{2}$.

1. Je kunt narekenen dat $v\_{4}=1 020 101$ en dat $v\_{5}=53$. Bereken zelf $v\_{2}$ en $v\_{3}$.
2. Zijn al de elementen van de rij $v\_{n}$ verschillend? Bewijs je antwoord.
3. We zien bij vraag 8 dat het getal 3 niet voorkomt in het rijtje $v\_{1},v\_{2},…,v\_{5}$.

 Stel dat 3 niet voorkomt in de rij $v\_{1},v\_{2},…,v\_{k}$ voor een bepaalde waarde van $k$.

 Toon aan dat 3 dan geen deler kan zijn van $b\_{k}=1+v\_{1}^{2}v\_{2}^{2}…v\_{k}^{2}$.

1. Kan 3 ooit voorkomen in de rij $v\_{n}$? Bewijs!
2. Verzin zelf een recursief voorschrift voor een nieuwe oneindige rij van verschillende priemgetallen.

# Gaten tussen opeenvolgende priemgetallen

### Kleine gaten

1. Als $p$ een priemgetal is, kan $p+1$ dan priem zijn? Verklaar!
2. Kan $p+2$ een priemgetal zijn als $p$ een priemgetal is?

Als het verschil tussen twee priemgetallen 2 is, dan spreken we van *priemtweelingen*.

1. Zoek enkele voorbeelden van priemtweelingen groter dan 5000.
2. Twee priemgetallen waarvan het verschil 4 is, noemen we *priemneven*. M.a.w. $\left(p, p+4\right)$ is een koppel priemneven. *Sexy priemgetallen* verschillen 6 eenheden van elkaar, dus is $\left(p,p+6\right)$ een sexy priemkoppel. Zoek voorbeelden van deze exotische priemtweetallen.

1. Bestaan er priemdrielingen $\left(p,p+2,p+4\right)$? Hoeveel zo’n drietallen bestaan er? Verklaar je antwoord.
2. Bestaan er drietallen van priemneven $\left(p,p+4,p+8\right)$?
3. Bestaan er sexy priemdrietallen $\left(p,p+6,p+12\right)$$(p,p+6,p+12)$? En sexy priemviertallen? En sexy priemvijftallen? Hoeveel sexy priemvijftallen bestaan er? Verklaar je antwoord.
4. Hieronder zie je telkens de eerste elementen van enkele sexy priemviertallen:

5, 11, 41, 61, 251, 601, 641, 1091, 1481, 1601, 1741, 1861, 2371, 2671, 3301, 3911, 4001, 5101, 5381, 5431, 5641, 6311, 6361, 9461, 11821, 12101, 12641, 13451, 14621, 14741, 15791, 15901, 17471, 18211, 19471, 20341, 21481, 23321, 24091, 26171, 26681

Buiten 5, eindigen al deze getallen op 1. Verklaar!

### Grote gaten

1. Toon aan dat de rij van $k-1$ opeenvolgende getallen

$$k!+2,k!+3,k!+4,…,k!+k-1,k!+k$$

met $k>1$ alleen samengestelde getallen bevat.

1. Hoe groot kunnen de gaten tussen opeenvolgende priemgetallen worden?